Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 4

Abgabe: Freitag, den 24. November 2023, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Beweismechanikaufgabe (*4 Punkte*)

Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge $A \subset X$ ist das Bild $f[A]$ von A unter f definiert durch $f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}$. Für eine Teilmenge $B \subset Y$ ist das Urbild $f^{-1}[B]$ von B unter f definiert durch $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

(a) Betrachte nun die Abbildung $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, gegeben durch

$$f(x, y) := (x + y, x - y)$$

für $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Untersuche f auf Surjektivität und Injektivität. Bestimme weiter $f^{-1}[\{(a, b)\}]$ für $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sowie $f[\{(x, x)\}]$ für $(x, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Beweise jeweils Deine Antwort.

(b) Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweise folgende Aussagen:
  (i) Für alle Teilmengen $B_1, B_2 \subset Y$ gilt $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.
  (ii) Für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ gilt $f[A_1] \setminus f[A_2] \subset f[A_1 \setminus A_2]$.

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form b1blattx-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf *ab, wobei Sie x durch die Nummer des Übungsblattes, ihrnachname durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten I" online unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe – Vorlesung Lineare Algebra I" hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!*

Aufgabe 4.1 (*1+1+1+1 Punkte*)

(a) Bringen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$ zunächst in reduzierte Zeilenstufenform und bestimmen Sie anschließend - mit Begründung - ihre Lösungsmengen:

$$\text{(i)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(ii)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 16 & 42 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 2 \end{array}\right)$$

(b) Bestimmen Sie unter Angabe Ihres Rechenwegs folgende Matrixprodukte:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ \frac{1}{2} & -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 9 & -7 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.2 (*4 Punkte*)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Das homogene lineare Gleichungssystem $Mx = 0$ hat genau dann in $\mathbb{R}$ eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung, wenn es in $\mathbb{Q}$ eine nichttriviale Lösung hat.

Aufgabe 4.3 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Menge

$$M_{n\times n}(K) \coloneqq \{A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} : a_{ij} \in K \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n\}$$

aller $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus K zusammen mit der komponentenweisen Addition, d.h. für $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n},\ B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$ ist

$$(A + B)_{ij} \coloneqq A_{ij} + B_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Beweisen Sie, dass $(M_{n\times n}(K), +)$ eine abelsche Gruppe bildet.